

§5 Reelle und Komplexe Funktionen

(nur Notationen!)

X, Y beliebige Mengen, $f: X \rightarrow Y$

"Abbildung" $\leadsto$ vgl. §1 für Definitionen

Spezialfälle: 1.) $Y = \mathbb{R}$

$\leadsto f$ reelle Funktion

2.) $Y = \mathbb{C} \leadsto f$ komplexe Funktion

(natürlich sind reelle Funktionen auch komplexe Funktionen, aber eben mit nur reellen Werten!)

3.) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\leadsto \varphi$ ist reelle bzw. komplexe Zahlenfolge

Statt $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) schreibt

man jetzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alternativ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

mit

$$a_n := \varphi(n)$$

Bsple: 1.) Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

die sogenannte charakteristische Funktion
von A , Schreibweise:

$$\mathbb{I}_A \text{ oder } \chi_A$$

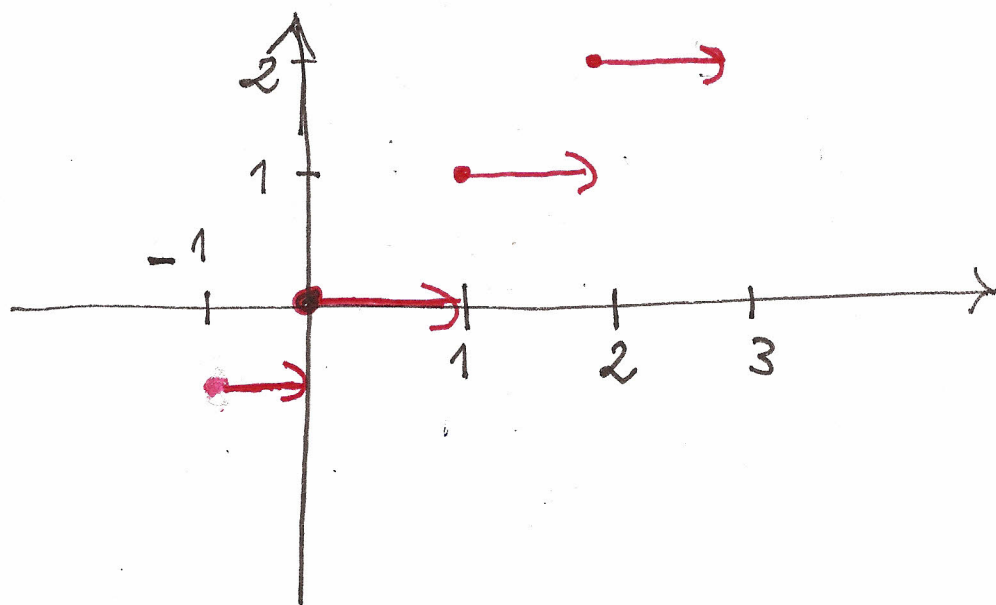
2.) Gauß Klammer :

-142-

$$[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [x] := \sup \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

also: $[x] = \text{größte ganze Zahl} \leq x$

Graph:



Definition 5.1 : Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
reelle Funktion.

- a) f monoton wachsend: $\Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 f —||— fallend: $\Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

→ jeweils für alle
 $x_1 \leq x_2$ aus X

b) f streng monoton wachsend

$$: \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2 \text{ aus } X$$

c) ... streng ... fallend ...

d) f monoton ... auf $\boxed{Y \subset X}$

$$: \Leftrightarrow \text{die Unglen gelten nur für } \underline{\underline{x_1, x_2 \in Y}}$$

Bem: 1) bei Folgen in $\mathbb{R}$:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ wachsend,}$$

usw.

2.) Streng monotone Funktionen sind injektiv.

3.) Da auf $\mathbb{C}$ keine Ordnung (mit den üblichen Eigenschaften) existiert, macht Monotonie für komplexe Fktn keinen Sinn.

Überlege: • $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ wächst streng monoton. -144-

• $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ weder fallend
noch wachsend,

aber streng wachsend auf $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
und streng fallend auf $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

Algebraische Operationen

für Funktionen $g, f: X \rightarrow \mathbb{C}$ werden
punktweise definiert, z.B.

$$f + g: X \rightarrow \mathbb{C}, (f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{C}, \dots, \overline{f}: X \rightarrow \mathbb{C}, \dots$$

Bsple: a) Polynome $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

$n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ gegeben
werden zusammengebaut aus $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}^k$.

b) Rationale Funktionen : $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome

rational Funktion (= Quotient von Polynomen)

$$R(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

definiert auf $\{z \in \mathbb{C} : g(z) \neq 0\}$.

Bspl. : $R(z) = \frac{z^3}{z^2+1}, \quad z \neq i, -i$

Reelle Potenzfunktionen mit rationalem Exponent

Was ist bekannt?

1.) $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

(rekursiv) $x^n := x \cdot \dots \cdot x$ (n-fach)

$$x \neq 0:$$

$$x^{-n} := (x^{-1})^n$$

2.) $x \in \mathbb{R}, x > 0, n \in \mathbb{N}$: $x^{1/n}$ in Satz 3.5

erklärt als eindeutige positive Lösung y von

$$y^n = x.$$

Damit sei für

$$x \in \mathbb{R}^+ := \{u \in \mathbb{R} : u > 0\}$$

und $q \in \mathbb{Q}$

$$x^q := \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m,$$

Falls

$$q = \frac{m}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Zeige:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^{\frac{1}{n'}}\right)^{m'} \quad \text{im Fall} \quad \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

Satz 5.1 : Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$, $p, q \in \mathbb{Q}$.

Dann gilt:

$$\begin{cases} x^{p+q} = x^p \cdot x^q, & (x^p)^q = x^{pq}, \\ (xy)^p = x^p y^p. \end{cases}$$

Beweis: Def. + alte Rechenregeln; aus der Def. der Wurzel folgt z.B.

$$x^{\frac{1}{kl}} = \left(x^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{l}} = \left(x^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad x > 0, k, l \in \mathbb{N}$$

□

Zeige: (zur Übung)

$r \in \mathbb{Q}, r > 0$: $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto x^r$ streng wachsend

$r \in \mathbb{Q}, r < 0$: $-||-$ streng fallend.

§6 Konvergenz von Folgen

Zur Erinnerung

Def 6.1: Eine Folge in $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$)
ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$).
Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \varphi(n)$

Beispiele: ① $a_n := 1 + 2^{-n}, n \in \mathbb{N}$

kommt immer näher an 1; dies

geschieht streng monoton: $a_{n+1} < a_n$

② $a_n := i^n$ Werte $\pm 1, \pm i$

die Folge kann sich nicht entscheiden

③

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

wächst streng monoton,
aber sehr langsam

$$a_2 = 1,5 \quad ; \quad a_{1000} = 7,48547;$$

$$a_{10000} = 9,78761 \dots$$

④

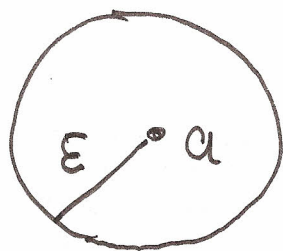
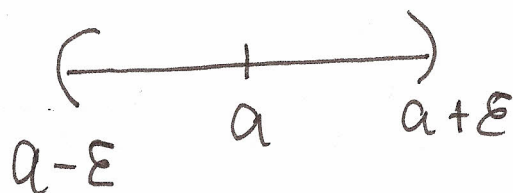
$$a_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k}$$

Bei ③ und ④: Verhalten für $n \rightarrow \infty$ unklar!

Def 6.2: Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{C}$
(oder $\mathbb{R}$) konvergiert bei $n \rightarrow \infty$ gegen

$a \in \mathbb{C}$ (bzw. $\in \mathbb{R}$) : $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$
für alle $n \geq N_\varepsilon$.

in $\mathbb{C}$:in $\mathbb{R}$:

" ϵ -Umgebung von a "

$\epsilon =$ beliebig-vorgegebene Fehlerschranke;

$N_\epsilon =$ Startindex; ab N_ϵ muss alles " in " der ϵ -Umgebung liegen

Wenn es ein a wie in Def. 6.2 gibt,
so ist es eindeutig!

Wären nämlich $a \neq a'$ zwei Kandidaten,

so setze $\epsilon := \frac{1}{2} |a - a'| > 0$

$\Rightarrow |a - a_n| < \epsilon$ und $|a' - a_n| < \epsilon$

für alle großen $n \implies$

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|,$$

geht nicht!

Notationen: 1.) falls es eine Zahl a gibt, die das Kriterium aus Def. 6.2 erfüllt, so schreibt man:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

a heißt Limes oder Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bei $n \rightarrow \infty$.

2.) (a_n) Nullfolge : $\iff a = 0$

3.) (a_n) divergent : $\iff \dots$ nicht konvergent

Die Def. ist unhandlich: Man muss ja den Kandidaten für einen möglichen Limes bereits geraten haben !

Wie macht man das z.B. bei

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k} ?$$

Nachfolgend kann man erst raten und dann beweisen.

Zentrale Beispiele:

① $n \in \mathbb{Q}, n > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

etwa: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

Beweis: $\varepsilon > 0$ gegeben; Archimedes $\implies$
 $\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$

also: $N^{-\frac{1}{n}} < \varepsilon$

Die Funktion $t \mapsto t^{-\frac{1}{n}}$ fällt (streng) monoton
auf $\mathbb{R}^+$ $\Rightarrow n^{-\frac{1}{n}} \leq N^{-\frac{1}{n}} \quad \forall n \geq N$

Zusammen: $n^{-\frac{1}{n}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N. \quad \square$

② $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Beweis: Sei zunächst $a > 1$. Betrachte

$$x_n := \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$$

Bernoulli $\Rightarrow a = (x_n + 1)^n \geq$

$1 + nx_n \geq nx_n$; es folgt:

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| = x_n \leq \frac{a}{n} \Rightarrow$$

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon \quad \forall n > \frac{a}{\varepsilon}$$

Fall $0 < a \leq 1 \leadsto$ Rückregeln Satz 6.1 $\square$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis: Es ist $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$

und

$$n = (x_n + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_n^k$$

$$\begin{array}{c} \geq \\ \uparrow \\ n \geq 2 \end{array} \quad \underbrace{\binom{n}{2} x_n^2}_{k=2} + \underbrace{1}_{k=0} \implies$$

$$n \geq \frac{1}{2} n (n-1) x_n^2 + 1 \implies$$

$$n-1 \geq \frac{1}{2} n (n-1) x_n^2 \implies \boxed{x_n^2 \leq \frac{2}{n}}_{n \geq 2}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; wähle

$$N > \frac{2}{\varepsilon^2} \implies$$

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \forall n \geq N$$

Es folgt: $0 \leq x_n \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \square$

④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

Beweis: in Satz 3.4 iii) (Folgerung aus Archimedes) wurde gezeigt

|| Ist $q \in (0, 1)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q^N < \varepsilon$.

benutze dies für $q := |z|$.

□

⑤

$$\forall k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, |z| > 1 :$$

(vgl. Skript p. 64)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$$

Für $|z| > 1$ wächst also $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ schneller als jede Potenzfolge $(n^k)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis: Sei $x := |z| - 1 > 0$ -156-

und $p \in \mathbb{N}$ fixiert mit $p > k$.

Für $n \geq 2p$ folgt:

$$|z|^n = (1+x)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l > \binom{n}{p} x^p$$
$$= \frac{1}{p!} \underbrace{n(n-1) \dots (n-p+1)}_{p\text{-Faktoren}} x^p =: \alpha \quad (1)$$

jeder Faktor $\geq n-p+1 \xrightarrow{n \geq 2p} \geq \frac{n}{2} + 1 \geq \frac{n}{2}$

$$\Rightarrow \alpha > \frac{1}{p!} x^p \left(\frac{n}{2}\right)^p \quad (2)$$

Also:

$$\frac{n^k}{|z|^n} \underset{(1)}{\leq} \frac{n^k}{\alpha} \underset{(2)}{\leq}$$

-157-

$$p! \frac{n^k}{x^p \left(\frac{n}{2}\right)^p} = p! x^{-p} 2^p n^{k-p}$$

Wahl von p ($> k$)

$$\leq 2^p p! x^{-p} \frac{1}{n}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$2^p p! x^{-p} \frac{1}{N} < \varepsilon \implies$$

$$\forall n \geq N: \frac{n^k}{|z|^n} < \varepsilon.$$

□

Satz 6.1 : (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Gelte $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ bei $n \rightarrow \infty$.

Dann ist

$$i) \begin{cases} a_n + b_n \longrightarrow a + b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \cdot a_n \longrightarrow \lambda \cdot a, \end{cases} \quad n \rightarrow \infty. (\lambda \in \mathbb{C})$$

(Die konvergenten Folgen bilden einen
Vektorraum.)

-158-

$$ii) \quad a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b.$$

$$iii) \quad b \neq 0 \implies b_n \neq 0 \quad \text{für fast alle } n$$

$$(\text{d.h. ab einem } n_0) \implies \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

$$iv) \quad \left\{ \begin{array}{l} |a_n| \rightarrow |a|, \quad \overline{a_n} \rightarrow \overline{a}, \\ \begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \left\{ a_n \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \left\{ a \right\} \end{array} \right\}$$

Für reelle Folgen gilt:

$$v) \quad a_n \leq b_n \quad \text{für fast alle } n \implies a \leq b$$

$$vi) \quad a_n \in [\alpha, \beta] \quad \text{für fast alle } n \\ \text{und ein Intervall } [\alpha, \beta] \implies \\ a \in [\alpha, \beta].$$

Beweis: i) Dreiecksungleichung:

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \dots \dots ;$$

iv) ebenfalls Δ -Ungl. ;

v) Übung (A1, Blatt 5);

vi) folgt aus v): $b_n \equiv \beta$, usw.

ad ii): Es ist $|a_n b_n - ab| =$

$$|a_n b_n - \color{red}{a_n b} + \color{red}{a_n b} - ab| \leq \quad (1)$$

$$|a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|;$$

Konvergenz von $(a_n) \implies \exists N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N_1$$

$$\implies |a_n| < 1 + |a| \quad \forall n \geq N_1$$